



①

(2)

D-H table:

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i^*
1	a_1	0°	0	θ_1^*
2	a_2	90°	0	θ_2^*
3	0	-90°	d_3	θ_3^*
4	0	-90°	0	θ_4^*
5	0	90°	0	θ_5^*
6	0	0°	d_6	θ_6^*

spherical
wrist
manipulator

$$T_c^3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_1 \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & a_1 \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & a_2 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & a_2 \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_b^6 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_1 \cdot \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & a_1 \cdot \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & a_2 \cdot \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & a_2 \cdot \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & -\sin\theta_3 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c^2 = A_1 \cdot A_2 =$$

$$T_c^2 = \begin{bmatrix} c1 & -s1 & 0 & a1 \cdot c1 \\ s1 & c1 & 0 & a1 \cdot s1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c2 & 0 & s2 & a2 \cdot c2 \\ s2 & 0 & -c2 & a2 \cdot c2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2 & 0 & c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2 & c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2 & 0 & s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2 & s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2 & 0 & c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2 & c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2 & 0 & s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2 & s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c3 & 0 & -s3 & 0 \\ s3 & 0 & c3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -(s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot c3 & -c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2 & (s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot s3 & d3 \cdot c1 \cdot s2 + d3 \cdot s1 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ (c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot c3 & c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2 & -(c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot s3 & d3 \cdot s1 \cdot s2 - d3 \cdot c1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ s3 & -1 & c3 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_c^4 = \begin{bmatrix} -(s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot c3 & -c1 \cdot s2 - s1 \cdot c2 & (s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot s3 & d3 \cdot c1 \cdot s2 + d3 \cdot s1 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ (c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot c3 & c1 \cdot c2 - s1 \cdot s2 & -(c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot s3 & d3 \cdot s1 \cdot s2 - d3 \cdot c1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ s3 & -1 & c3 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c4 & 0 & -s4 & 0 \\ s4 & 0 & c4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot c2 - c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot s2 - s4 \cdot c1 \cdot s2 - s4 \cdot s1 \cdot c2 & -(s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot s3 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot c2 + c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot s2 - c4 \cdot c1 \cdot s2 - c4 \cdot s1 \cdot c2 & d3 \cdot c1 \cdot s2 + d3 \cdot s1 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot s2 + c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot c2 + s4 \cdot c1 \cdot c2 - s4 \cdot s1 \cdot s2 & (c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot s3 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot s2 - c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot c2 + c4 \cdot c1 \cdot c2 - c4 \cdot s1 \cdot s2 & d3 \cdot s1 \cdot s2 - d3 \cdot c1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ s3 \cdot c4 - s4 & -c3 & -s3 \cdot s4 - c4 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_o^5 = \begin{pmatrix} c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot c2 - c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot s2 - s4 \cdot c1 \cdot s2 - s4 \cdot s1 \cdot c2 & -(s1 \cdot s2 - c1 \cdot c2) \cdot s3 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot c2 + c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot s2 - c4 \cdot c1 \cdot s2 - c4 \cdot s1 \cdot c2 & d3 \cdot c1 \cdot s2 + d3 \cdot s1 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot s2 + c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot c2 + s4 \cdot c1 \cdot c2 - s4 \cdot s1 \cdot s2 & (c1 \cdot s2 + s1 \cdot c2) \cdot s3 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot s2 - c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot c2 + c4 \cdot c1 \cdot c2 - c4 \cdot s1 \cdot s2 & d3 \cdot s1 \cdot s2 - d3 \cdot c1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ s3 \cdot c4 - s4 & -c3 & -s3 \cdot s4 - c4 & d3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e \begin{bmatrix} c5 & 0 & s5 & 0 \\ s5 & 0 & -c5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot c2 - c5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot s2 - c5 \cdot s4 \cdot c1 \cdot s2 - c5 \cdot s4 \cdot s1 \cdot c2 - s3 \cdot s5 \cdot s1 \cdot s2 + s3 \cdot s5 \cdot c1 \cdot c2 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot c2 + c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot s2 - c4 \cdot c1 \cdot s2 - c4 \cdot s1 \cdot c2 & s5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot c2 - s5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot s2 - s5 \cdot s4 \cdot c1 \cdot s2 - s5 \cdot s4 \cdot s1 \cdot c2 + s3 \cdot c5 \cdot s1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot c1 \cdot c2 \\ c5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot s2 + c5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot c2 + c5 \cdot s4 \cdot c1 \cdot c2 - c5 \cdot s4 \cdot s1 \cdot s2 + s3 \cdot s5 \cdot c1 \cdot s2 + s3 \cdot s5 \cdot s1 \cdot c2 & -c3 \cdot s4 \cdot c1 \cdot s2 - c3 \cdot s4 \cdot s1 \cdot c2 + c4 \cdot c1 \cdot c2 - c4 \cdot s1 \cdot s2 & s5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot c1 \cdot s2 + s5 \cdot c3 \cdot c4 \cdot s1 \cdot c2 + s5 \cdot s4 \cdot c1 \cdot c2 - s5 \cdot s4 \cdot s1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot c1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot s1 \cdot c2 \\ c5 \cdot s3 \cdot c4 - c5 \cdot s4 - c3 \cdot s5 & -s3 \cdot s4 - c4 & s5 \cdot s3 \cdot c4 - s5 \cdot s4 + c3 \cdot c5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d3 \cdot c1 \cdot s2 + d3 \cdot s1 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\ d3 \cdot s1 \cdot s2 - d3 \cdot c1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\ d3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_o^6 = T_o^5 \cdot \begin{bmatrix} c6 & -s6 & 0 & 0 \\ s6 & c6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& c3 \cdot c1 \cdot c2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot c1 \cdot c2 \cdot s4 \cdot s6 - c3 \cdot s1 \cdot s2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 + c3 \cdot s1 \cdot s2 \cdot s4 \cdot s6 - s4 \cdot c5 \cdot c6 \cdot c1 \cdot s2 - s4 \cdot c5 \cdot c6 \cdot s1 \cdot c2 + s3 \cdot s5 \cdot c6 \cdot c1 \cdot c2 - s3 \cdot s5 \cdot c6 \cdot s1 \cdot s2 \\
& c3 \cdot c1 \cdot s2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot c1 \cdot s2 \cdot s4 \cdot s6 + c3 \cdot s1 \cdot c2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot s1 \cdot c2 \cdot s4 \cdot s6 + s4 \cdot c5 \cdot c6 \cdot c1 \cdot c2 - s4 \cdot c5 \cdot c6 \cdot s1 \cdot s2 + s3 \cdot s5 \cdot c6 \cdot c1 \cdot s2 + s3 \cdot s5 \cdot c6 \cdot s1 \cdot c2 \\
& s3 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - s3 \cdot s4 \cdot s6 - s4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot s5 \cdot c6 \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c3 \cdot c1 \cdot c2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot c1 \cdot c2 \cdot s4 \cdot c6 + c3 \cdot s1 \cdot s2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 + c3 \cdot s1 \cdot s2 \cdot s4 \cdot c6 + s4 \cdot c5 \cdot s6 \cdot c1 \cdot s2 + s4 \cdot c5 \cdot s6 \cdot s1 \cdot c2 - s3 \cdot s5 \cdot s6 \cdot c1 \cdot c2 + s3 \cdot s5 \cdot s6 \cdot s1 \cdot s2 \\
& -c3 \cdot c1 \cdot s2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot c1 \cdot s2 \cdot s4 \cdot c6 - c3 \cdot s1 \cdot c2 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - c3 \cdot s1 \cdot c2 \cdot s4 \cdot c6 - s4 \cdot c5 \cdot s6 \cdot c1 \cdot c2 + s4 \cdot c5 \cdot s6 \cdot s1 \cdot s2 - s3 \cdot s5 \cdot s6 \cdot c1 \cdot s2 - s3 \cdot s5 \cdot s6 \cdot s1 \cdot c2 \\
& -s3 \cdot c4 \cdot c5 \cdot c6 - s3 \cdot s4 \cdot c6 + s4 \cdot c5 \cdot s6 + c3 \cdot s5 \cdot s6 \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot c1 \cdot c2 - c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot s1 \cdot s2 - s4 \cdot s5 \cdot c1 \cdot s2 - s4 \cdot s5 \cdot s1 \cdot c2 - s3 \cdot c5 \cdot c1 \cdot c2 + s3 \cdot c5 \cdot s1 \cdot s2 \\
& c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot c1 \cdot s2 + c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot s1 \cdot c2 + s4 \cdot s5 \cdot c1 \cdot c2 - s4 \cdot s5 \cdot s1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot c1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot s1 \cdot c2 \\
& s3 \cdot c4 \cdot s5 - s4 \cdot s5 + c3 \cdot c5 \\
& 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot c2 - c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot s2 - s4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot s2 - s4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot c2 - s3 \cdot c5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot c2 + s3 \cdot c5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot s2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 - s1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot c1 \\
& c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot s2 + c3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot c2 + s4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot c2 - s4 \cdot s5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot d6 \cdot c1 \cdot s2 - s3 \cdot c5 \cdot d6 \cdot s1 \cdot c2 + s1 \cdot a2 \cdot c2 + c1 \cdot a2 \cdot c2 + a1 \cdot s1 \\
& s3 \cdot c4 \cdot s5 \cdot d6 - s4 \cdot s5 \cdot d6 + c3 \cdot c5 \cdot d6 + d3 \\
& 1
\end{aligned}$$

Roll, Pitch and Yaw

(4)

$$\textcircled{1} \quad - \sin \theta = s\theta_3 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6 - s_3 \cdot s_4 \cdot s_6 - s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 - c_3 \cdot s_5 \cdot c_6$$
$$\sin \theta = s_3 \cdot s_4 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 + c_3 \cdot s_5 \cdot c_6 - s_3 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6$$

$$w_1 \angle \theta = \arcsin(s_3 \cdot s_4 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 + c_3 \cdot s_5 \cdot c_6 - s_3 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6)$$

$$\textcircled{2} \quad w_2 \angle \psi = \arcsin \left(\frac{-s_3 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6 - s_3 \cdot s_4 \cdot c_6 + s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 + c_3 \cdot s_5 \cdot s_6}{\cos \theta} \right)$$

$$\textcircled{3} \quad w_3 \angle \phi = \arcsin \left(\frac{c_3 \cdot c_1 \cdot s_2 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6 - c_3 \cdot c_1 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot s_6 + c_3 \cdot s_1 \cdot c_2 \cdot c_4 \cdot c_5 \cdot c_6 - c_3 \cdot s_1 \cdot c_2 \cdot s_4 \cdot s_6 + s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot c_1 \cdot c_2 - s_4 \cdot c_5 \cdot c_6 \cdot s_1 \cdot s_2 + s_3 \cdot s_5 \cdot c_6 \cdot c_1 \cdot s_2 + s_3 \cdot s_5 \cdot c_6 \cdot s_1 \cdot c_2}{\cos \theta} \right)$$

$$\boxed{R_3^6 = (R_0^3)^T \cdot R}$$

Determination of angles Q4,Q5,Q6:

$$R_{36} = (R_{03})^T * R$$

$$R_{03} := \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= -(\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3) \\ r_{12} &= -\cos(q_1)*\sin(q_2)-\sin(q_1)*\cos(q_2) \\ r_{13} &= (\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\sin(q_3) \\ r_{21} &= (\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3) \\ r_{22} &= \cos(q_1)*\cos(q_2)-\sin(q_1)*\sin(q_2) \\ r_{23} &= -(\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\sin(q_3) \\ r_{31} &= \sin(q_3) \\ r_{32} &= -1 \\ r_{33} &= \cos(q_3) \end{aligned}$$

$$R \text{ (row,pitch and yaw) } :=$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi)*\cos(\theta) & -\sin(\phi)*\cos(\psi)+\cos(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi) & \sin(\phi)*\sin(\psi)+\cos(\phi)*\sin(\theta)*\cos(\psi) \\ \sin(\phi)*\cos(\theta) & \cos(\phi)*\cos(\psi)+\sin(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi) & -\cos(\phi)*\sin(\psi)+\sin(\phi)*\sin(\theta)*\cos(\psi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\theta)*\sin(\psi) & \cos(\theta)*\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

$$\text{Transpose}(R_{03}) :=$$

$$\begin{bmatrix} -(\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3) & (\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3) & \sin(q_3) \\ -\cos(q_1)*\sin(q_2)-\sin(q_1)*\cos(q_2) & \cos(q_1)*\cos(q_2)-\sin(q_1)*\sin(q_2) & -1 \\ (\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\sin(q_3) & -(\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\sin(q_3) & \cos(q_3) \end{bmatrix}$$

$$R_{36} = \text{transpose}(R_{03}) \times R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = -(\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*\cos(\phi)*\cos(\theta) + (\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*\sin(\phi)*\cos(\theta) - \sin(q_3)*\sin(\phi)$$

$$r_{12} = -(\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*(\sin(\phi)*\cos(\psi)+\cos(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi)) + (\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*(\cos(\phi)*\cos(\psi)+\sin(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi)) + \sin(q_3)*\cos(\theta)*\sin(\psi)$$

$$r_{13} = -(\sin(q_1)*\sin(q_2)-\cos(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*(\sin(\phi)*\sin(\psi)+\cos(\phi)*\sin(\theta)*\cos(\psi)) + (\cos(q_1)*\sin(q_2)+\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(q_3)*(-\cos(\phi)*\sin(\psi)+\sin(\phi)*\sin(\theta)*\cos(\psi)) + \sin(q_3)*\cos(\theta)*\cos(\psi)$$

$$r_{21} = (-\cos(q_1)*\sin(q_2)-\sin(q_1)*\cos(q_2))*\cos(\phi)*\cos(\theta) + (\cos(q_1)*\cos(q_2)-\sin(q_1)*\sin(q_2))*\sin(\phi)*\cos(\theta) + \sin(\phi)$$

$$r_{22} = (-\cos(q_1)*\sin(q_2)-\sin(q_1)*\cos(q_2))*(-\sin(\phi)*\cos(\psi)+\cos(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi)) + (\cos(q_1)*\cos(q_2)-\sin(q_1)*\sin(q_2))*(\cos(\phi)*\cos(\psi)+\sin(\phi)*\sin(\theta)*\sin(\psi)) - \cos(\theta)*\sin(\psi)$$

$$r_{23} = (-\cos(q_1) \cdot \sin(q_2) - \sin(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot (\sin(\phi) \cdot \sin(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi)) + (\cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) \cdot (-\cos(\phi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi)) - \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)$$

$$r_{31} = (\sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) - (\cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \sin(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) - \cos(q_3) \cdot \sin(\phi)$$

$$r_{32} = (\sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot (-\sin(\phi) \cdot \cos(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi)) - (\cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \sin(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\psi)) + \cos(q_3) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\psi)$$

$$r_{33} = (\sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot (\sin(\phi) \cdot \sin(\psi) + \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi)) - (\cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \sin(q_1) \cdot \cos(q_2)) \cdot \sin(q_3) \cdot (-\cos(\phi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\psi)) + \cos(q_3) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\psi)$$

FROM D-H REPRESENTATION:

$$\cos(q_5) = r_{33} \Rightarrow q_5 = \arccos(r_{33})$$

$$\cos(q_4) \cdot \sin(q_5) = r_{13} \Rightarrow q_4 = \arccos(r_{13} / \sin(q_5))$$

$$\sin(q_5) \cdot \sin(q_6) = r_{32} \Rightarrow q_6 = \arcsin(r_{32} / \sin(q_5))$$

Jacobian.

$$J = \begin{bmatrix} Z_0 \times (O_6 - O_0) & Z_1 \times (O_6 - O_0) & Z_2 \times (O_6 - O_0) & Z_3 \times (O_6 - O_0) & Z_4 \times (O_6 - O_0) & Z_5 \times (O_6 - O_0) \\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{bmatrix}$$

$O_3 = O_4 = O_5$ (spherical wrist)

$$O_6 = \begin{bmatrix} c_3 \cdot c_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_3 \cdot c_5 d_6 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) + a_2 \cdot c_2 (d_3 \cdot c_1 - s_1) + a_1 \cdot c_1 \\ c_3 \cdot c_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_3 \cdot c_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + a_2 \cdot c_2 (d_3 \cdot s_1 + c_1) + a_1 \cdot s_1 \\ d_6 (s_3 \cdot c_4 \cdot s_5 - s_4 \cdot s_5 + c_3 \cdot c_5) + d_3 \end{bmatrix}$$

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot c_1 \\ a_1 \cdot s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad O_2 = \begin{bmatrix} c_1 \cdot a_2 \cdot c_2 - s_1 \cdot a_2 \cdot c_2 + a_1 \cdot c_1 \\ s_1 \cdot a_2 \cdot c_2 + c_1 \cdot a_2 \cdot c_2 + a_1 \cdot s_1 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad O_3 = \begin{bmatrix} d_3 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + a_2 c_2 (c_1 - s_1) + a_1 \cdot c_1 \\ d_3 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) + a_2 c_2 (s_1 + c_1) + a_1 \cdot s_1 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$O_3 = O_4 = O_5$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2 \\ s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Z_3 = \begin{bmatrix} s_3 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) \\ -s_3 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$Z_4 = \begin{bmatrix} c_3 \cdot s_4 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) - c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) \\ -c_3 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) \\ -s_3 \cdot s_4 - c_4 \end{bmatrix}, \quad Z_5 = \begin{bmatrix} s_5 \cdot c_3 c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_3 c_5 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) \\ s_5 \cdot c_3 \cdot c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_3 c_5 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) \\ s_5 s_3 c_4 - s_5 s_4 + c_3 \cdot c_5 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 \times (O_6 - O_0) = \begin{vmatrix} -c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) - s_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + s_3 c_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) - a_2 c_2 (d_3 s_1 + c_1) - a_1 s_1 \\ c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) - s_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) + s_3 c_5 d_6 (s_1 s_2 - c_1 c_2) + a_2 c_2 (d_3 c_1 - s_1) + a_1 c_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Z_1 \times (O_6 - O_1) = \begin{vmatrix} -c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) - s_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) + s_3 c_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) - a_2 c_2 (d_3 s_1 + c_1) \\ c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) - s_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) + s_3 c_5 d_6 (s_1 s_2 - c_1 c_2) + a_2 c_2 (d_3 c_1 - s_1) \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Z_2 \times (O_6 - O_2) = \begin{vmatrix} c_1 s_2 + s_1 c_2 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 \\ 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} g \\ b \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(s_1 s_2 - c_1 c_2) - b \\ g - f(c_1 s_2 + s_1 c_2) \\ b(c_1 s_2 + s_1 c_2) - g(s_1 s_2 - c_1 c_2) \end{vmatrix}$$

$$g = c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) - s_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) + s_3 c_5 d_6 (s_1 s_2 - c_1 c_2) + d_3 c_1 a_2 c_2$$

$$b = c_3 c_4 s_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) + s_4 s_5 d_6 (c_1 c_2 - s_1 s_2) - s_3 c_5 d_6 (c_1 s_2 + s_1 c_2) + d_3 s_1 a_2 c_2$$

$$f = d_6 (s_3 c_4 s_5 - s_4 s_5 + c_3 c_5)$$

$$Z_3 \times (O_6 - O_3) = \begin{vmatrix} s_3 (s_1 s_2 - c_1 c_2) \\ -s_3 (c_1 s_2 + s_1 c_2) \\ c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} m \\ k \\ p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p s_3 (c_1 s_2 + s_1 c_2) - k c_3 \\ c_3 m - p s_3 (s_1 s_2 - c_1 c_2) \\ k s_3 (s_1 s_2 - c_1 c_2) + m s_3 (c_1 s_2 + s_1 c_2) \end{vmatrix}$$

$$M = c_3 \cdot c_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_3 \cdot c_5 d_6 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) + a_2 c_2 d_3 \cdot c_1 - d_3 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) - a_2 c_2 (d_3 \cdot c_1 - c_1)$$

$$K = c_3 \cdot c_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_4 \cdot s_5 d_6 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_3 \cdot c_5 d_6 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + a_2 \cdot c_2 (d_3 \cdot s_1 - s_1) - d_3 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2)$$

$$p = d_6 (s_3 \cdot c_4 \cdot s_5 - s_4 \cdot s_5 + c_3 \cdot c_5)$$

$$Z_4 \times (O_6 - O_4) = \begin{cases} p(-c_3 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2)) + k(s_3 \cdot s_4 + c_4) \\ m(-s_3 \cdot s_4 - c_4) - p(c_3 \cdot s_4 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot s_2) - c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2)) \\ k(c_3 \cdot s_4 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2) - c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2)) - m(-c_3 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2)) \end{cases}$$

$$Z_5 \times (O_6 - O_5) = \begin{cases} p(s_5 \cdot c_3 \cdot c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_3 \cdot c_5 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2)) - k(s_5 \cdot s_3 \cdot c_4 - s_5 \cdot s_4 + c_3 \cdot c_5) \\ m(s_5 \cdot s_3 \cdot c_4 - s_5 \cdot s_4 + c_3 \cdot c_5) - p(s_5 \cdot c_3 \cdot c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_3 \cdot c_5 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2)) \\ k(s_5 \cdot c_3 \cdot c_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_3 \cdot c_5 (s_1 \cdot s_2 - c_1 \cdot c_2)) - m(s_5 \cdot c_3 \cdot c_4 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2) + s_5 \cdot s_4 (c_1 \cdot c_2 - s_1 \cdot s_2) - s_3 \cdot c_5 (c_1 \cdot s_2 + s_1 \cdot c_2)) \end{cases}$$